

Нахождение коэффициентов разложения полей напряжений в окрестности вершин двух коллинеарных трещин в анизотропных средах с помощью переопределенного метода

М.А. Фомченкова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Обоснование. Изучение стационарного состояния и распространения трещин в анизотропных материалах актуально из-за широкого применения последних в авиации, энергетике и строительстве. Анизотропия материальных свойств влияет на распространение трещин, усложняя прогноз прочности и долговечности конструкций. Исследования напряженно-деформированного состояния в анизотропных материалах помогают разрабатывать надежные методы диагностики, предотвращения аварий и проектирования, учитывающие уникальные свойства материалов [1–6].

Цель — анализ влияния регулярных слагаемых на описание полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины в анизотропных линейно упругих материалах; оценка точности усеченных асимптотических рядов, описывающих поля напряжений, деформаций и перемещений в области вершины дефекта в бесконечной ортотропной пластине; создание и реализация процедуры переопределенного метода нахождения коэффициентов рядов, представляющих напряжения, деформации и перемещения у вершины трещины.

Методы. Асимптотическое решение М. Уильямса (1), описывающее напряжения и деформации у вершины центральной трещины, в бесконечной пластине, к которой приложена растягивающая нагрузка, а также его обобщение для анизотропных линейно упругих материалов, служит наиболее удобным аналитическим инструментом для изучения механических полей около вершин трещин и угловых вырезов в плоских задачах механики разрушения [2–4]. В практических целях данные ряды обычно ограничиваются конечным числом членов ряда. Предполагается, что увеличение количества учитываемых слагаемых ряда способствует более точному описанию напряжений вблизи вершины трещины:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m r^{\frac{k}{2}-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений второго ранга, r, θ — полярные координаты, a_k^m — коэффициенты ряда, являющиеся функциями приложенной нагрузки и отвечающие за конфигурации образца.

Для вычисления коэффициентов ряда (1), характеризующего поле напряжений в задаче о растяжении анизотропной плоскости с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, применен переопределенный метод, опирающийся на результаты конечно-элементного моделирования в программной среде Simulia Abaqus.

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \Sigma, \quad (2)$$

где A — вектор-столбец, состоящий из разыскиваемых амплитудных множителей, a_k^m , C — матрица, состоящая из известных угловых функций, зависящих от компонент тензора напряжений, Σ — вектор-строка, состоящая из вычисленных методом конечных элементов значений компонент тензора напряжений.

Классический алгоритм переопределенного метода [5] базируется на анализе компонент вектора перемещений вблизи вершины трещины, что требует учета перемещений тела как абсолютно твердого тела. В данной работе предложен новый подход, использующий компоненты тензора напряжений для нахождения амплитудных коэффициентов в окрестности дефекта, что значительно упрощает вычислительный процесс.

Результаты. На основе метода конечных элементов и разложений в степенные ряды развит и реализован усовершенствованный переопределенный метод для вычисления амплитудных коэффициентов в плоской постановке задачи.

В данной работе применялся материал типа перовскит, тензор модулей упругости которого представлен на рис. 1.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 17 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Тензор модулей упругости материала типа перовскит

Коэффициент интенсивности напряжений равен $K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha = 182 \text{ Па} \cdot \text{см}^{-1/2}$, T — напряжение $T = \sigma [\cos^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2) \sin \alpha \cos \alpha] = -75 \text{ Па}$.

На рис. 2 показаны результаты конечно-элементного моделирования нагружения анизотропной пластины в пакете SIMULIA Abaqus.

На рис. 3 представлены угловые распределения напряжений правой трещины в окрестности левой вершины в пластине с двумя коллинеарными трещинами при нормальном отрыве, полученные на основе многопараметрического разложения (1), ограниченного разным числом членов ряда. Асимптотическое разложение (1) обеспечивает сходимость ряда в пределах радиуса сходимости. При этом анализ ошибки, допускаемой при усечении ряда с удержанием различного числа слагаемых, показывает, что усеченные ряды также способны точно описывать поля напряжений с увеличением количества удерживаемых слагаемых. Это свойство иллюстрируется графиками угловых распределений напряжений на рис. 2, где сопоставлены

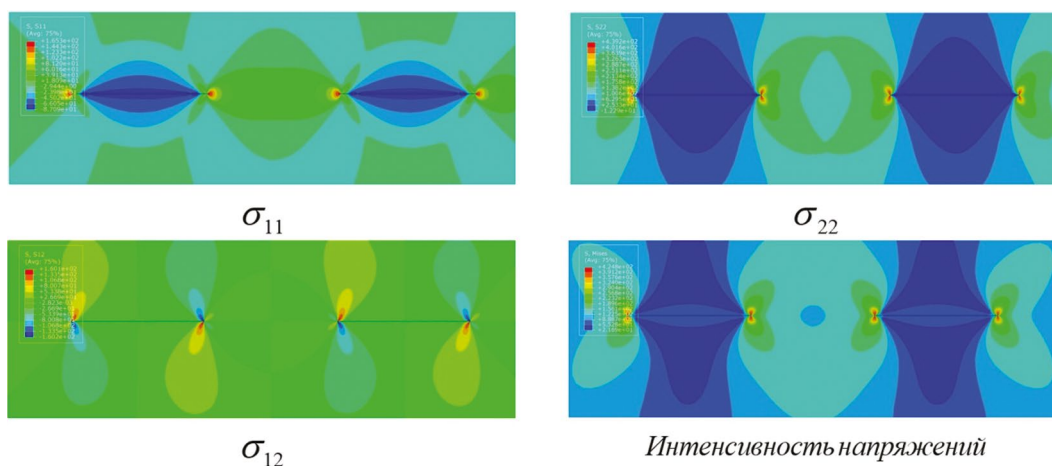


Рис. 2. Распределения напряжений и интенсивности напряжений для двух коллинеарных трещин

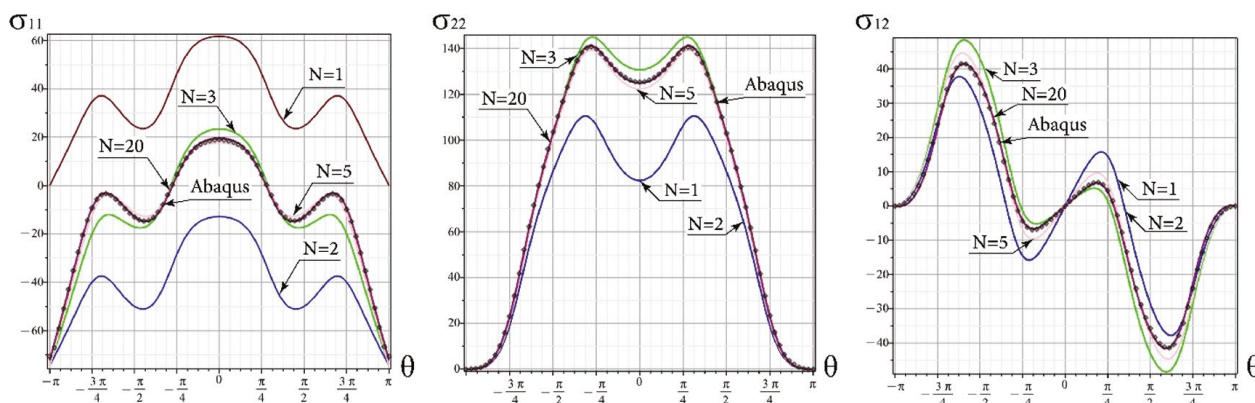


Рис. 3. Угловые распределения напряжений в окрестности вершины $z = 0,8 \text{ мм}$

результаты последовательных усеченных решений для напряжений с данными, полученными методом конечных элементов.

Выводы. В работе проанализирован вклад регулярных членов асимптотического решения М. Уильямса, выражающего механические поля у вершин двух горизонтальных коллинеарных трещин в анизотропной пластине. На основе решения переопределенной системы уравнений определены масштабные коэффициенты для рассматриваемой конфигурации образца.

Ключевые слова: механика разрушения; трещины; анизотропия; ортотропные материалы; асимптотическое решение; переопределенный метод; анализ напряжений и деформаций.

Список литературы

1. Фомченкова М.А., Степанова Л.В. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2024. Т. 30, № 5. С. 54–66. doi: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66 EDN: DVOPHG
2. Степанова Л.В., Фомченкова М.А. О точности усеченных разложений полей у вершины трещины в анизотропных материалах // Проблемы прочности и пластичности. 2024. Т. 86, № 4. С. 403–420. doi: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-403-420 EDN: PFRATP
3. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling 2021. Vol. 91, P. 837–862. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.025
4. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Journal of Applied Mechanics 1952. Vol. 19, P. 526–528. doi: 10.1115/1.4010553
5. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // Engineering Fracture Mechanics 2020. Vol. 231. Article No 106982. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.106982
6. Степанова Л.В., Мушанкова К.А. Эффекты слагаемых высшего порядка малости в обобщенных рядах для представления полей, ассоциированных с вершиной трещины в анизотропных средах. Часть 1. Сравнение точного и асимптотического решений определения напряжений у вершины трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. № 1. С. 59–81. doi: 10.15593/perm.mech/2025.1.05 EDN: BHHASN

Сведения об авторе:

Мария Александровна Фомченкова — студентка, группа 4255-010403D, механико-математический факультет; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия. E-mail: fomchenkova.ma@ssau.ru

Сведения о научном руководителе:

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия. E-mail: stepanova.lv@ssau.ru