Исследование термоэлектроупругого состояния длинного пьезокерамического цилиндра при неосесимметричном нестационарном нагреве

В.А. Юрин

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. В настоящее время существует значительное множество приборов, принцип действия которых основан на взаимном влиянии полей различной физической природы: температурных, электрических и механических (упругих) [1, 2]. Для описания работы этих приборов используются различные теории математической физики [3–5]. Для преодоления математических трудностей при интегрировании исходной системы дифференциальных уравнений задачи термоэлектроупругости, как правило, рассматриваются в осесимметричной постановке [6–9].

Цель — найти замкнутое решение неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра.

Методы. Неосесимметричные уравнения статики, электростатики и теплового баланса, записанные в цилиндрической системе координат, имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*}+\frac{1}{r_*}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial r_*}=0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r_*}+\frac{1}{r_*}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r_*}=0;$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r_*}+\frac{D_r}{r_*}+\frac{1}{r_*}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}=0$$

$$T_0\frac{\partial S}{\partial t_*}=\Lambda\left(\Delta\frac{\partial \Theta^*}{\partial t_*}+\frac{1}{r^2{}_*}\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial \varphi^2}\right).$$

В исходную систему уравнений также входят начально-краевые условия (опущены), которыми учитывается отсутствие механических напряжений на цилиндрических поверхностях (нормальные напряжения вдоль радиуса и касательные — в плоскости радиуса и угла поворота), заземление внутренней поверхности и подключение к измерительному прибору внешней, а также граничные условия теплопроводности.

Алгоритм решения задачи сводится к нескольким последовательным преобразованиям исходной системы дифференциальных уравнений. На первом этапе используются синус- и косинус-преобразования Фурье, позволяющие реализовать метод неполного разделения переменных. Затем неоднородные граничные условия при помощи определенных разложений приводятся к однородному виду, после чего полученная новая несамосопряженная начально-краевая задача решается методом биортогонального конечного преобразования.

Формулы обращения, соответствующие каждому этапу преобразований, позволяют получить следующие окончательные выражения для радиальных и тангенциальных перемещений, а также для потенциала электрического поля и температуры:

$$U(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[H_1(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)N_1(\mu_{in},n,r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]\cos(n\varphi)d\varphi;$$

$$V(r,\varphi,t)=\pi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[H_2(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)N_2(\mu_{in},n,r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]\sin(n\varphi)d\varphi;$$

$$\Phi(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[H_3(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)N_3(\mu_{in},n,r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]\cos(n\varphi)d\varphi;$$

$$\Theta(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[H_4(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)N_4(\mu_{in},n,r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]\cos(n\varphi)d\varphi.$$

Результаты. В качестве образцов рассмотрены длинные полые цилиндры с внешним радиусом b = 0,02 м и внутренним — a = 0,005 м из пьезокерамики PZT-4 и PZT-5A. К части внутренней поверхности цилиндра (центральный угол величиной 90°) приложена температурная «нагрузка». Начальная температура тела соответствует температуре окружающей среды и равна 20 °C, конечная температура равна 100 °C. Также задан коэффициент теплоотдачи между цилиндрической поверхностью и окружающей воздушной средой (естественная конвекция), принятый 5,6 Вт/(м^2 K).

В случае изменения температуры на части внутренней поверхности цилиндра, функция приращения температуры на внешней образующей изменяется от 5 до 38 °C. При этом увеличение участка прогрева приводит к росту приращения температуры, а в осесимметричном случае (прогрев всей внутренней поверхности цилиндра) — приращение температуры становится постоянным и составляет порядка 73 °C.

В цилиндре, изготовленном из пьезокерамики PZT-4, разность потенциалов на поверхностях существенно выше по сравнению с этим же параметром для материала PZT-5A, т. к. PZT-4 имеет меньшую диэлектрическую проницаемость.

Радиальная поляризация материала и образование электрического поля в процессе деформирования цилиндра приводит к увеличению его «жесткости» в данном направлении, поэтому на участке температурного «загружения» увеличение толщины стенки цилиндра незначительно. Обратная картина наблюдается для тангенциальных перемещений: наличие электрического поля приводит к их возрастанию.

Большее значение коэффициента линейного температурного расширения пьезокерамики PZT-4 по сравнению с PZT-5A приводит к образованию больших перемещений.

Выводы. Построено новое замкнутое решение связанной неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра при удовлетворении на его поверхностях граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го родов, которое позволяет определить все компоненты термоэлектроупругих полей в рассматриваемом теле, а также разность потенциалов между его электродированными поверхностями.

Ключевые слова: неосесимметричная задача термоэлектроупругости; пьезокерамический цилиндр; биортогональные конечные интегральные преобразования; нестационарное температурное поле; связанная задача термоэлектроупругости.

Список литературы

1. Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // Датчики и системы. 2009. № 2. С. 9–11. EDN: JWYALN
2. Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы. 2016. № 3. С. 50–56. EDN: XHFKCH
3. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int J Solids Struct. 1974. Vol. 10, N 6. P. 625–637. doi: 10.1016/0020-7683(74)90047-X
4. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J Mech Phys Solids. 1967. Vol. 15, N 5. P. 299–309. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J Elast. 1993. Vol. 31. P. 189–208. doi: 10.1007/BF00044969
6. Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // J Mech Sci Tech. 2009. Vol. 23. P. 45–53. doi: 10.1007/s12206-008-1002-8
7. Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // Appl Math Mech. 2011. Vol. 32, N 8. P. 997–1008. doi: 10.1007/s10483-011-1475-6
8. Dai H.L., Wang X. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures // Int J Solids Struct. 2005. Vol. 42, N 3-4. P. 1151–1171. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061
9. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J Therm Stresses. 1994. Vol. 17, N 3. P. 471–487. doi: 10.1080/01495739408946273

Сведения об авторе:

Владимир Андреевич Юрин — аспирант, факультет промышленного и гражданского строительства; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: get8ack@mail.ru

Сведения о научном руководителе:

Дмитрий Аверкиевич Шляхин — доктор технических наук, доцент; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru